Homéomorphisme $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n^{++}$

Théorème : L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ définit un homéomorphisme.

* Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$, (λ_i) réels tq $S = P \operatorname{diag}(\lambda_i)\, {}^tP$. Donc $\exp S = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_i})\, {}^tP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $e^{\lambda_i} > 0$.
De plus, exp est continue. Donc $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est <u>bien définie et $\mathcal{C}^0$</u>

* Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, $B = P \operatorname{diag}(\mu_i)\, {}^tP$ avec $\mu_i > 0$.
Posons $A = P \operatorname{diag}(\ln \mu_i)\, {}^tP$. A est symétrique et $\exp(A) = B$: <u>surjectivité</u>

* Si $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifient $\exp(A_1) = \exp(A_2)$, alors par théorème spectral, $A_1 = P_1 \operatorname{diag}(\lambda_i)\, {}^tP_1$. Soit Q interpolateur : $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. On a : $Q(e^{A_1}) = A_1$.
Or A_2 commute à $e^{A_2} \in \mathbb{C}[A_2]$

> En effet, $\mathbb{C}[A]$ est un sev fermé (car dim finie) de $M_n(\mathbb{C})$
> et $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{C}[A]$, donc $\exp A \in \mathbb{C}[A]$.

Donc A_2 commute à e^{A_1}, donc à $Q(e^{A_1}) = A_1$.
On peut donc codiagonaliser A_1 et A_2 : $A_1 = R \operatorname{diag}(\lambda_i) R^{-1}$, $A_2 = R \operatorname{diag}(\mu_i) R^{-1}$
De là, $e^{A_1} = e^{A_2}$ assure $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$, donc $\lambda_i = \mu_i$. $\forall i$. $A_1 = A_2$. <u>injectivité</u>

* Si $(A_p) \in {\mathcal{S}_n^{++}}^{\mathbb{N}}$ converge vers $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, alors montrons que $B_p \to B$ où $A_p = \exp(B_p)$ et $A = \exp(B)$.

<u>Lemme</u> : $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \rho(A) = \max_{\lambda \in Sp A} |\lambda|$.

> • Soit λ_0 vp pour laquelle $\rho(A) = |\lambda_0|$. Soit X_0 $\vec{vp}$ associé.
> $$\rho(A) = |\lambda_0| = \frac{\|AX_0\|_2}{\|X_0\|_2} \leq |||A|||_2$$
> • De plus, par théorème spectral, $A = P \operatorname{diag}(\lambda_i) P^{-1}$, $P \in O_n(\mathbb{R})$, donc
> $$\|AX\|_2 = \|\operatorname{diag}(\lambda_i) Y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i)^2\right)^{1/2} \leq \rho(A) \|Y\|_2 = \rho(A)\|X\|_2$$
> où $Y = P^{-1}X$.

$|||A_p|||_2 \to |||A|||_2$ donc $\rho(A_p) \to \rho(A)$. $(\rho(A_p))_p$ est bornée par C.
Par continuité du passage à l'inverse, de même, $(\rho(A_p^{-1}))_p$ est bornée par $\tilde{C}$.

Ainsi, $\forall p$, $\forall \lambda \in Sp(A_p)$, $\lambda \in [\frac{1}{\tilde{C}}, C]$ donc $\forall p$, $\forall \mu \in Sp(B_p)$, $\mu \in [-\ln \tilde{C}, \ln C]$.
Par le lemme, (B_p) est bornée pour la norme $|||\ |||_2$.
Par Bolzano-Weierstrass, $B_{\phi(p)} \to B_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé.
Par continuité de exp, $\exp(B_0) = \exp(B) = \lim A_{\phi(p)}$ et par injectivité $B_0 = B$. Donc (B_p) converge vers B (une seule valeur d'adhérence) <u>inverse $\mathcal{C}^0$</u>